ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)
Semestre d'automne — 2025-2026

Série 2: Systèmes linéaires II

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) calculer la **forme échelonnée réduite** d'une matrice, avec la méthode de Gauss-Jordan ;

(O.2) déterminer les **variables liées** et **variables libres** ;

(O.3) calculer les **solutions d'un SEL** à partir de la forme échelonnée réduite ;

(O.4) exprimer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme **combinaison linéaire** d'autres vecteurs, si possible.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- algorithme de Gauss-Jordan
- variables liées (ou de base)
- variables libres (ou fondamentales)
- combinaison linéaire

Noyau d'exercices

1.1 Algorithme de Gauss et résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 (Formes échelonnées réduites)
Déterminer toutes les valeurs possibles des nombres a, b, c, d et e dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice suivante est sous forme échelonnée et forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 1 & d & 3 \\ 0 & e & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Algorithme de Gauss-Jordan)
Échelonner et réduire les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Résolution de systèmes d'équations linéaires I)

Rappel de la théorie

Pour chacun des systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 = 6, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_3 = 2, \\ x_4 = -1, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \end{cases}$

(i) écrire la matrice augmentée ;
(ii) transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite ;
(iii) identifier les variables liées et les variables libres, et écrire l'ensemble de toutes les solutions.

Exercice 4 (Formes échelonnées réduites et nombre de solutions)
Pour chacune des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que l'on va considérer comme des matrices augmentées pour les deux dernières questions,

(i) vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite ;
(ii) identifier les variables liées et les variables libres ;
(iii) déterminer si les SEL respectifs possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

Exercice 5 (Systèmes avec paramètres)
Déterminer les valeurs du nombre réel $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système d'équations linéaires

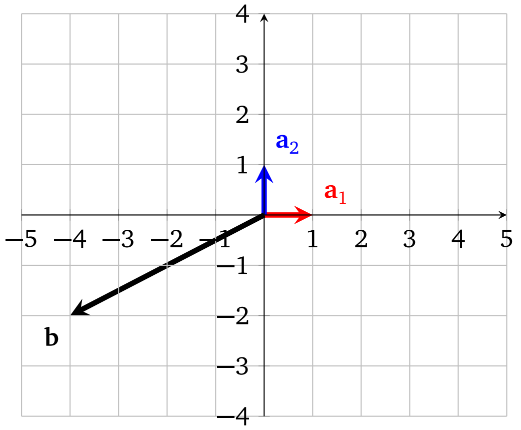
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ \quad\;\; x_2 + ax_3 = 2, \\ \quad\quad (a^2-4)x_3 = a-2, \end{cases}$$

possède des solutions et déterminer ces solutions.

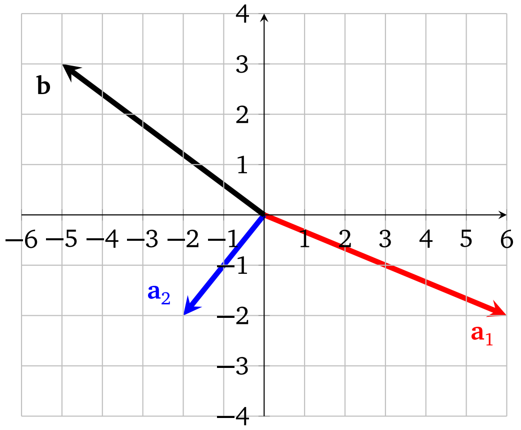
1.2 Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et leurs combinaisons linéaires

Exercice 6 (Combinaisons linéaires dans le plan)
À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, l'échelle est l'unité.

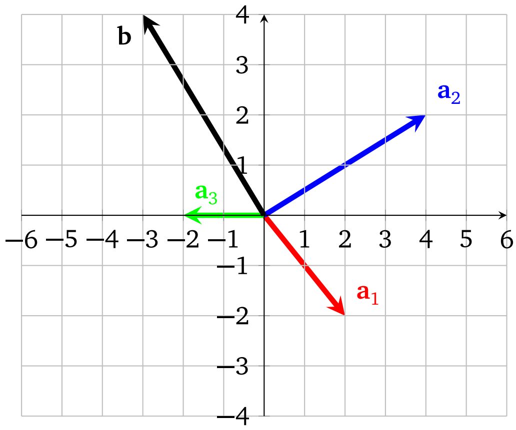
(a) Trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ pour le graphe



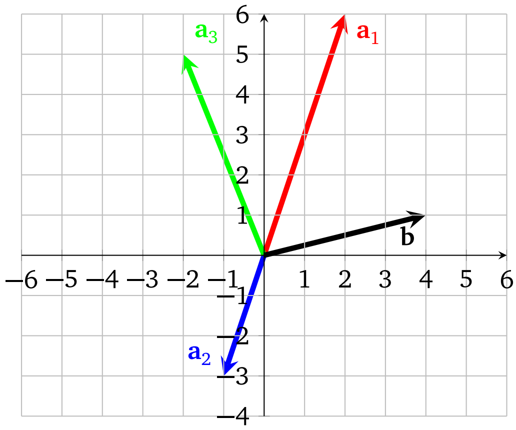
(b) Trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ pour le graphe



(c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ pour le graphe



(d) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ pour le graphe



Peut-on trouver $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2$?

Exercice 7 (Combinaisons linéaires dans l'espace I)
On considère les vecteurs

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Est-il possible d'écrire $\mathbf{b}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$?

(b) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Pour compléter la pratique

2.1 Algorithme de Gauss et résolution de systèmes linéaires

Exercice 8 (Réduction et nombre de solutions)
On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Mettre les matrices précédentes sous forme échelonnée et sous forme échelonnée réduite.

(ii) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de SEL. Déterminer dans chaque cas si le SEL respectif possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

Exercice 9 (Colonnes avec des pivots)
Laquelle des colonnes de la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ne contient pas de pivot ?

Exercice 10 (Résolution de systèmes d'équations linéaires II)
À l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 4, \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & = & 3, \\ & & & & x_3 & + & 3x_4 & - & 2x_5 & = & 7, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & & & = & 7. \end{array}\right.$$

Exercice 11 (Résolution de systèmes d'équations linéaires III)
Déterminer l'ensemble de solutions des SEL suivants :

(a) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 3, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & = & 4, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 4, \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \end{array}\right.$$

(b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & & & + & 5_3 & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Exercice 12 (V/F sur compatibilité de SEL)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse. V F

(a) Le système homogène d'équations linéaires représenté par la matrice ☐ ☐

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

est compatible.

(b) Le système inhomogène d'équations linéaires représenté par la matrice ☐ ☐

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

est compatible.

(c) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. ☐ ☐

(d) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. ☐ ☐

(e) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. ☐ ☐

(f) Il existe une matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues avec un pivot dans chaque colonne. En plus, le SEL associé est compatible. ☐ ☐

2.2 Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et leurs combinaisons linéaires

Exercice 13 (Combinaisons linéaires dans l'espace II)
On considère les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelles valeurs de α le vecteur $\mathbf{w}_\alpha$ peut-il être écrit comme une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$? Trouver dans ce cas des coefficients $\lambda_{1,\alpha}, \lambda_{2,\alpha} \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{w}_\alpha = \lambda_{1,\alpha}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2,\alpha}\mathbf{v}_2$.

(b) Le vecteur $\mathbf{v}$ se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}?$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 14 (Combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^4$)
On considère le sous-espace vectoriel $S = \mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$, où

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des informations suivantes est correcte ?

- ☐ Le sous-espace vectoriel S ne contient aucun vecteur de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le sous-espace vectoriel S contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur $\mathbf{v}$ est dans S.
- ☐ Le sous-espace vectoriel S contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 15 (Combinaisons linéaires avec un paramètre)
On considère les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + 7 \\ 8 \\ 2\alpha + 1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\mathbf{w}_\alpha$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ lorsque

☐ $\alpha = 2$; ☐ $\alpha = 4$; ☐ $\alpha = 1$; ☐ $\alpha = -2$.